

МЕТОД ОПЕРАТОР-ФУНКЦИЙ В ЗАДАЧЕ О НОРМАЛЬНЫХ ВОЛНАХ АНИЗОТРОПНОГО ЭКРАНИРОВАННОГО ВОЛНОВОДА ПРОИЗВОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ¹

Аннотация.

Актуальность и цели. Цель работы – исследование спектральных свойств задачи о нормальных волнах анизотропной магнитной волноведущей структуры.

Материалы и методы. Для нахождения решения использована вариационная формулировка задачи. Задача сводится к анализу оператор-функции, нелинейно зависящей от постоянной распространения. Исследуются свойства оператор-функции, необходимые для анализа свойств спектра задачи.

Результаты. Получены результаты о локализации характеристических чисел оператор-функции на комплексной плоскости. Рассмотрен вопрос двукратной полноты системы собственных и присоединенных векторов с конечным дефектом.

Вывод. Предложенный аналитический метод позволяет доказать дискретность спектра в задаче об азимутальных симметричных волнах закрытого неоднородного анизотропного волновода с продольным намагничиванием. Кроме того, данный метод может быть использован для исследования спектральных свойств более сложных волноведущих структур.

Ключевые слова: уравнение Максвелла, анизотропная неоднородная волноведущая структура, вариационная формулировка, пространства Соболева, двукратная полнота с дефектом по Келдышу.

Е. Ю. Smol'kin, М. О. Snegur

THE METHOD OF OPERATOR FUNCTIONS IN THE PROBLEM OF NORMAL WAVES OF AN ANISOTROPIC SCREENED WAVEGUIDE OF ARBITRARY SECTION

Abstract.

Background. The goal of the work is to study the spectral properties of the problem of normal waves of an anisotropic magnetic wave-leading structure.

Materials and methods. To find the solution, a variational formulation of the problem is used. The problem is reduced to analyzing an operator function that is nonlinearly dependent on the propagation constant. The properties of the operator-function necessary to analyze the properties of the spectrum of the problem are investigated.

Results. Results were obtained regarding the localization of the characteristic numbers of the operator function on the complex plane. The question of double completeness of the system of eigenfunctions and associated vectors with a finite defect is considered.

¹ Работа была выполнена при поддержке гранта Министерства образования и науки РФ (1.894.2017/4.6).

© 2018 Смолькин Е. Ю., Снегур М. О. Данная статья доступна по условиям всемирной лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>), которая дает разрешение на неограниченное использование, копирование на любые носители при условии указания авторства, источника и ссылки на лицензию Creative Commons, а также изменений, если таковые имеют место.

Conclusion. The proposed analytical method allows one to prove the discreteness of the spectrum in the problem of symmetric azimuthal waves of a closed inhomogeneous anisotropic waveguide with longitudinal magnetization. In addition, this method can be used to study the spectral properties of more complex wave-leading structures.

Key words: Maxwell's equation, anisotropic inhomogeneous wave-leading structure, variational formulation, Sobolev spaces, double completeness with Keldysh defect.

Введение

Задачи о распространении волн в сложных волноведущих структурах являются важным классом электродинамических задач. Электродинамические параметры обычных диэлектрических и магнитных сред зависят от их физической структуры. Однако на практике часто требуются среды с конкретными свойствами, которые можно получить, применяя либо частичное заполнение среды, либо однородное по составу.

Процессы распространения электромагнитных волн в таких структурах приводят к краевым задачам на собственные значения. Свойства спектра в таких задачах можно эффективно изучать, применяя метод операторных пучков и оператор-функций. В работах [1–3] построена теория распространения нормальных волн в экранированных волноводах: доказана дискретность спектра задачи, получены результаты о распределении (локализации) характеристических чисел на комплексной плоскости, а также доказаны теоремы о кратной полноте по Келдышу системы собственных и присоединенных векторов задачи в специальных пространствах.

Однако для неоднородных или анизотропных волноведущих структур такой теории не построено. В этом случае задача становится значительно сложнее (в силу некомпактности соответствующих операторов). Предложен подход [4, 5], основанный на сведении задачи к исследованию уже оператор-функции, а не операторного пучка.

1. Постановка задачи

Будем рассматривать трехмерное пространство $\mathbb{R}^3$ с декартовой системой координат $Oxyz$. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная область с гладкими границами Γ_1 и Γ_2 такими, что $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$.

Рассмотрим закрытую волноведущую структуру, поперечное сечение которой плоскостью $z = \text{const}$ образовано областью Ω с границами Γ_1 и Γ_2 . Границы Γ_1 и Γ_2 – проекции поверхности идеального проводящего, бесконечно тонкого экрана (рис. 1).

Диэлектрическая проницаемость имеет вид $\epsilon_0 \hat{\epsilon}$

$$\hat{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_x(x) & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_x(x) & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z(x) \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где $\mathbf{x}=(x,y)$. Будем предполагать, что $\varepsilon_x \in C^1(\bar{\Omega})$, $\varepsilon_z \in C^1(\bar{\Omega})$ и $\varepsilon_x > 1$, $\varepsilon_z > 1$, $\text{Im} \varepsilon_x = 0$, $\text{Im} \varepsilon_z = 0$ и μ_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума.

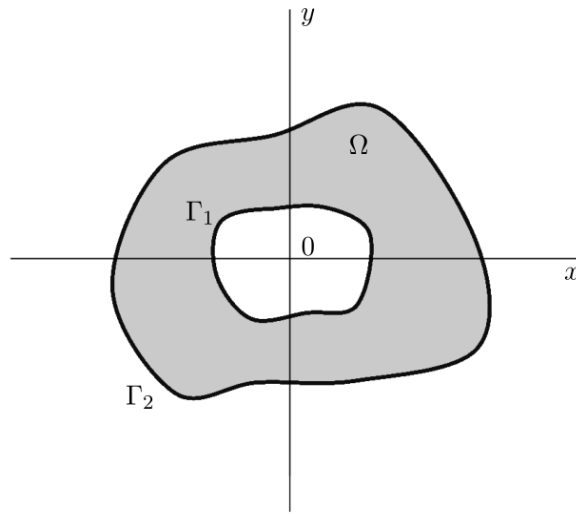


Рис. 1. Геометрия задачи

Будем искать нетривиальные решения системы уравнений Максвелла

$$\begin{cases} \text{rot} \mathbf{H} = -i\tilde{\varepsilon} \mathbf{E}, \\ \text{rot} \mathbf{E} = i\mathbf{H} \end{cases} \quad (2)$$

следующего вида [6]:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= (E_x(x)\mathbf{e}_x + E_y(x)\mathbf{e}_y + E_z(x)\mathbf{e}_z)e^{i\gamma z}, \\ \mathbf{H} &= (H_x(x)\mathbf{e}_x + H_y(x)\mathbf{e}_y + H_z(x)\mathbf{e}_z)e^{i\gamma z}, \end{aligned} \quad (3)$$

причем должны быть удовлетворены следующие условия: ограниченность в любом конечном объеме волновода энергии поля

$$\int_V (|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{H}|^2) dX < \infty, \quad (4)$$

обращение в нуль на металле касательных составляющих поля $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{E}_\tau|_{\Gamma_1} = 0, \quad \mathbf{E}_\tau|_{\Gamma_2} = 0. \quad (5)$$

Здесь $X=(x,y,z)$, $V \subset \Sigma := \{X : x \in \Omega\}$ – любой конечный объем; τ – касательный орт. Система уравнений (2) записана в нормированном виде [3],

где осуществлен следующий переход $k_0 x \rightarrow x, y \rightarrow \frac{\gamma}{k_0}, \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}, \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$;

где $k_0^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0$, γ – постоянная распространения волновода.

Перепишем систему (2) в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial H_z}{\partial y} - i\gamma H_y = -i\epsilon_x E_x, \\ i\gamma H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} = -i\epsilon_x E_y, \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = -i\epsilon_z E_z, \\ \frac{\partial E_z}{\partial y} - i\gamma E_y = iH_x, \\ i\gamma E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} = iH_y, \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = iH_z, \end{cases} \quad (6)$$

выразим функции E_x , H_x , E_y , H_y следующим образом:

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{i}{\kappa^2} \left(\gamma \frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{\partial H_z}{\partial y} \right), H_x = \frac{i}{\kappa^2} \left(\gamma \frac{\partial H_z}{\partial x} - \epsilon_x \frac{\partial E_z}{\partial y} \right), \\ E_y &= \frac{i}{\kappa^2} \left(\gamma \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right), H_y = \frac{i}{\kappa^2} \left(\gamma \frac{\partial H_z}{\partial y} + \epsilon_x \frac{\partial E_z}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

$$\kappa^2 = \epsilon_x - \gamma^2.$$

Таким образом, исходная задача свелась к нахождению следующих двух функций:

$$\Pi(x, y) := E_z(x, y), \quad \Phi(x, y) := H_z(x, y). \quad (8)$$

Задача сводится к отысканию таких постоянных распространения γ , для которых система уравнений Максвелла имеет ненулевые решения

$$\begin{cases} L_1 \Pi := \Delta \Pi + \kappa^2 \frac{\epsilon_z}{\epsilon_x} \Pi = \frac{\gamma^2}{\epsilon_x \kappa^2} \nabla \epsilon_x \nabla \Pi + \frac{\gamma}{\epsilon_x \kappa^2} J(\epsilon_x, \Phi), \quad x \in \Omega, \\ L_2 \Phi := \Delta \Phi + \kappa^2 \Phi = \frac{1}{\kappa^2} \nabla \epsilon_x \nabla \Phi - \frac{\gamma}{\kappa^2} J(\epsilon_x, \Pi), \quad x \in \Omega, \end{cases} \quad (9)$$

и

$$J(u, v) := \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x},$$

удовлетворяющие граничным условиям на Γ_1 и Γ_2 :

$$\Pi|_{\Gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n}|_{\Gamma_1} = 0, \quad \Pi|_{\Gamma_2} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n}|_{\Gamma_2} = 0, \quad (10)$$

условиям ограниченности поля:

$$\int_{\Omega} (|\nabla \Pi|^2 + |\nabla \Phi|^2 + |\Pi|^2 + |\Phi|^2) dx < \infty. \quad (11)$$

Переход к задаче (9)–(11) невозможен лишь при $\gamma^2 = \varepsilon_x$; в этом случае необходимо рассматривать исходную систему (2) отдельно.

2. Вариационное соотношение

Будем рассматривать задачу (9)–(11) в следующих пространствах Соболева: $H_0^1(\Omega)$ и $H^1(\Omega)$, со скалярным произведением и нормой

$$(f, g)_1 = \int_{\Omega} (\nabla f \nabla \bar{g} + f \bar{g}) dx, \quad \|f\|_1^2 = (f, f)_1.$$

Умножив уравнения системы (9) на непрерывно дифференцируемые функции $\bar{u}$ и $\bar{v}$ в Ω и применив формулу Грина [7] для области Ω , получаем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\varepsilon_x}{\kappa^2} \bar{u} L_1 \Pi dx &= \int_{\Gamma_2} \frac{\varepsilon_x}{\kappa^2} \bar{u} \frac{\partial \Pi}{\partial n} d\tau - \int_{\Gamma_1} \frac{\varepsilon_x}{\kappa^2} \bar{u} \frac{\partial \Pi}{\partial n} d\tau - \\ &- \int_{\Omega} \left(\frac{\varepsilon_x}{\kappa^2} \nabla \Pi \nabla \bar{u} - \frac{\gamma^2}{\kappa^4} \bar{u} \nabla \Pi \nabla \varepsilon_x \right) dx + \int_{\Omega} \varepsilon_z \Pi \bar{u} dx \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{1}{\kappa^2} \bar{v} L_2 \Phi dx &= \int_{\Gamma_2} \frac{1}{\kappa^2} \bar{v} \frac{\partial \Phi}{\partial n} d\tau - \int_{\Gamma_1} \frac{1}{\kappa^2} \bar{v} \frac{\partial \Phi}{\partial n} d\tau - \\ &- \int_{\Omega} \left(\frac{1}{\kappa^2} \nabla \Phi \nabla \bar{v} - \frac{1}{\kappa^4} \bar{v} \nabla \Phi \nabla \varepsilon_x \right) dx + \int_{\Omega} \Phi \bar{v} dx. \end{aligned}$$

Принимая во внимание граничные условия (10), получаем

$$\int_{\Omega} \frac{\varepsilon_x}{\kappa^2} \bar{u} L_1 \Pi dx = - \int_{\Omega} \left(\frac{\varepsilon_x}{\kappa^2} \nabla \Pi \nabla \bar{u} - \frac{\gamma^2}{\kappa^4} \bar{u} \nabla \Pi \nabla \varepsilon_x \right) dx + \int_{\Omega} \varepsilon_z \Pi \bar{u} dx$$

и

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\kappa^2} \bar{v} L_2 \Phi dx = - \int_{\Omega} \left(\frac{1}{\kappa^2} \nabla \Phi \nabla \bar{v} - \frac{1}{\kappa^4} \bar{v} \nabla \Phi \nabla \varepsilon_x \right) dx + \int_{\Omega} \Phi \bar{v} dx.$$

Принимая во внимание правые части уравнений системы (9), получаем

$$- \int_{\Omega} \frac{\varepsilon_x}{\kappa^2} \nabla \Pi \nabla \bar{u} dx + \int_{\Omega} \varepsilon_z \Pi \bar{u} dx - \int_{\Omega} \frac{\gamma}{\kappa^4} \bar{u} J(\varepsilon_x, \Phi) dx = 0,$$

$$-\int_{\Omega} \frac{1}{\kappa^2} \nabla \Phi \nabla \bar{v} dx + \int_{\Omega} \Phi \bar{v} dx + \int_{\Omega} \frac{\gamma}{\kappa^4} \bar{v} J(\varepsilon_x, \Pi) dx = 0.$$

Складывая последние выражения,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\varepsilon_z \Pi \bar{u} + \Phi \bar{v}) dx - \int_{\Omega} \frac{1}{\kappa^2} (\varepsilon_x \nabla \Pi \nabla \bar{u} + \nabla \Phi \nabla \bar{v}) dx + \\ & + \int_{\Omega} \frac{\gamma}{\kappa^4} (\bar{v} J(\varepsilon_x, \Pi) - \bar{u} J(\varepsilon_x, \Phi)) dx = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

далее домножив последнее соотношение на γ^2 , получаем вариационное соотношение

$$\begin{aligned} & \gamma^2 \int_{\Omega} (\varepsilon_z \Pi \bar{u} + \Phi \bar{v}) dx + \int_{\Omega} (\varepsilon_x \nabla \Pi \nabla \bar{u} + \nabla \Phi \nabla \bar{v}) dx - \int_{\Omega} \frac{\varepsilon_x}{\kappa^2} (\varepsilon_x \nabla \Pi \nabla \bar{u} + \nabla \Phi \nabla \bar{v}) dx + \\ & + \int_{\Omega} \frac{\gamma^3}{\kappa^4} (\bar{v} J(\varepsilon_x, \Pi) - \bar{u} J(\varepsilon_x, \Phi)) dx = 0, \forall u \in H_0^1(\Omega), v \in H^1(\Omega). \end{aligned} \quad (13)$$

Определение 1. Функции

$$\Pi \in H_0^1(\Omega), \Phi \in H^1(\Omega), (\|\Pi\|_1 + \|\Phi\|_1 \neq 0)$$

будем называть собственными векторами задачи (9)–(11), соответствующими характеристическому числу (х.ч.) $\gamma_0 \in \mathbb{C}$, если для $\gamma = \gamma_0$ вариационное соотношение (13) справедливо для любых $u \in H_0^1(\Omega), v \in H^1(\Omega)$.

3. Исследование спектра оператор-функции

Определим на произведении гильбертовых пространств $H = H_0^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ скалярное произведение и норму следующим образом:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (u_1, v_1)_1 + (u_2, v_2)_1, \|\mathbf{u}\|^2 = \|u_1\|_1^2 + \|u_2\|_1^2; \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H,$$

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T, \mathbf{v} = (v_1, v_2)^T, u_1, v_1 \in H_0^1(\Omega), u_2, v_2 \in H^1(\Omega).$$

Интегралы в соотношении (13) определяют линейные, ограниченные операторы $T: H \rightarrow H$ по формуле

$$t(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (T\mathbf{u}, \mathbf{v}), \forall \mathbf{v} \in H, \quad (14)$$

где полуторалинейные формы ограничены $|t(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq C \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$.

Определим следующие операторы:

$$k(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} (\varepsilon_z \Pi \bar{u} + \Phi \bar{v}) dx = (K\mathbf{u}, \mathbf{v}), \forall \mathbf{v} \in H,$$

$$k_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} (\varepsilon_x \Pi \bar{u} + \Phi \bar{v}) dx = (K_1 \mathbf{u}, \mathbf{v}), \forall \mathbf{v} \in H,$$

$$k_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} \frac{\varepsilon_x}{\kappa^2} (\varepsilon_x \Pi \bar{u} + \Phi \bar{v}) dx = (K_2(\gamma) \mathbf{u}, \mathbf{v}), \forall \mathbf{v} \in H,$$

$$a_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} (\varepsilon_x \nabla \Pi \nabla \bar{u} + \nabla \Phi \nabla \bar{v} + \varepsilon_x \Pi \bar{u} + \Phi \bar{v}) dx = (A_1 \mathbf{u}, \mathbf{v}), \forall \mathbf{v} \in H,$$

$$a_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} \frac{\varepsilon_x}{\kappa^2} (\varepsilon_x \nabla \Pi \nabla \bar{u} + \nabla \Phi \nabla \bar{v} + \varepsilon_x \Pi \bar{u} + \Phi \bar{v}) dx = (A_2(\gamma) \mathbf{u}, \mathbf{v}), \forall \mathbf{v} \in H,$$

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} \frac{\gamma^3}{\kappa^4} (\bar{v} J(\varepsilon_x, \Pi) - \bar{u} J(\varepsilon_x, \Phi)) dx = (B(\gamma) \mathbf{u}, \mathbf{v}), \forall \mathbf{v} \in H.$$

Введем в рассмотрение следующую форму и порождаемую ею оператор-функцию:

$$b_0(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} \left(\bar{u} \left(g_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x} + g_2 \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) - \bar{v} \left(g_1 \frac{\partial \Pi}{\partial x} + g_2 \frac{\partial \Pi}{\partial y} \right) \right) dx = (B_0(\gamma) \mathbf{u}, \mathbf{v}), \forall \mathbf{v} \in H.$$

Предположим, что функции $g_1, g_2 \in C(\bar{\Omega})$, $\Pi, \Phi, u, v \in C^1(\bar{\Omega}_2)$. Имеет место оценка

$$\begin{aligned} |b_0(\mathbf{u}, \mathbf{v})| &= \left| \int_{\Omega} \left(\bar{u} \left(g_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x} + g_2 \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) - \bar{v} \left(g_1 \frac{\partial \Pi}{\partial x} + g_2 \frac{\partial \Pi}{\partial y} \right) \right) dx \right| \leq \\ &\leq \int_{\Omega} \left(|u| \left(|g_1| \left| \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right| + |g_2| \left| \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right| \right) + |v| \left(|g_1| \left| \frac{\partial \Pi}{\partial x} \right| + |g_2| \left| \frac{\partial \Pi}{\partial y} \right| \right) \right) dx \leq \sqrt{2} \|g\|_{C(\bar{\Omega})} \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|_{L_2}, \end{aligned}$$

где $g = (g_1, g_2)^T$.

Распространим оценку по непрерывности

$$|b_0(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq \sqrt{2} \|g\|_{C(\bar{\Omega})} \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|_{L_2} \quad (15)$$

на любые функции $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H$.

Аналогично доказывается ограниченность формы $b(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

Вариационное соотношение (13) примет следующий вид:

$$(N(\gamma) \mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0, \forall \mathbf{v} \in H,$$

или

$$N(\gamma) \mathbf{u} = 0, N(\gamma): H \rightarrow H,$$

$$N(\gamma) := \gamma^2 K + A_1 - K_1 - A_2(\gamma) + K_2(\gamma) + B(\gamma). \quad (16)$$

Собственные векторы $N(\gamma)$ и характеристические числа совпадают с собственными векторами и собственными значениями задачи (9)–(11) при $\gamma^2 \neq \varepsilon_x$.

4. Свойства спектра оператор-функции

Приведем следующие утверждения о свойствах операторов, входящих в оператор-функцию $N(\gamma)$ (доказательство см. в [3]):

Лемма 1. Оператор A_1 положительно определен:

$$I \leq A_1 \leq \max_{x \in \Omega} \varepsilon_x I. \quad (17)$$

Лемма 2. Операторы K, K_1 и $K_2(\gamma)$ компактные. Оператор K положительно определен и для его собственных чисел верна асимптотика

$$\lambda_n(K) = O(n^{-1}), \quad n \rightarrow \infty.$$

Лемма 3. Оператор-функции $B(\gamma)$ являются компактными и голоморфными в области

$$\mathbb{C} \setminus \Lambda_0 \text{ и } \Lambda_0 := \{\gamma : \gamma^2 = \varepsilon_x(x), x \in \bar{\Omega}\}.$$

Доказательство. Полагая $v = B_0 u$ в оценке (15), получим

$$\|B_0 u\|^2 = |b_0(u, B_0 u)| \leq \sqrt{2} \|g\|_{C(\bar{\Omega})} \|u\| \|B_0 u\|_{L_2}. \quad (18)$$

Пусть $u_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ слабо в H . Тогда $\|u_n\| \leq \tilde{C}$ и $B_0 u_n \rightarrow 0$ слабо в H . Так как вложение $H^1(\Omega) \subset L_2(\Omega)$ компактно, то $\|B_0 u_n\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, следовательно $B_0 : H \rightarrow H$ является компактным. Аналогично доказывается компактность оператора B .

Оператор-функция $B(\gamma)$ дифференцируема для фиксированных $u, v \in H$. Далее, применяя теорему 3 [8], получим результаты леммы. $\square$

Лемма 4. Резольвентное множество $\rho(N) := \{\gamma : \exists N^{-1}(\gamma) : H \rightarrow H\}$ оператор-функции $N(\gamma)$ не пусто; $\rho(N) \neq \emptyset$.

Доказательство. Пусть $\bar{\gamma} \in \mathbb{R}, \gamma > 0$ и $\gamma \rightarrow +\infty$.

Рассмотрим следующую оператор-функцию:

$$N(\gamma) = N_1(\gamma) + N_2(\gamma),$$

где

$$N_1(\gamma) = \gamma^2 K + A_1 - K_1, \quad N_2(\gamma) = -A_2(\gamma) + K_2(\gamma) + B(\gamma).$$

Тогда оператор-функцию $N(\gamma)$ можно рассматривать как возмущение операторного пучка N_1 оператор-функцией N_2 при больших γ .

Учитывая свойства оператора K , получаем, что при достаточно большом $\bar{\gamma}$ справедливо

$$(N_1(\bar{\gamma})\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \bar{\gamma}^2(K\mathbf{u}, \mathbf{u}) + (A_1\mathbf{u}, \mathbf{u}) - (K_1\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq \|\mathbf{u}\|^2$$

для любого $\mathbf{u}$.

Поэтому $\bar{\gamma} \in \rho(N_1)$, где $\rho(N_1)$ – резольвентное множество пучка N_1 .
 Причем, используя теорему 4.1 из [9], имеем оценку $\|N_1^{-1}(\bar{\gamma})\| \leq 1$.

Выберем $\bar{\gamma}$ так, чтобы $\|N_2(\bar{\gamma})\| < 1$. Получаем, что существует и ограничен оператор

$$(N_1(\gamma) + N_2(\gamma))^{-1} = (I + N_1^{-1}(\bar{\gamma})N_2(\gamma))^{-1} N_1^{-1}(\bar{\gamma}). \quad \square$$

Теорема 1. Оператор $N(\gamma): H \rightarrow H$ является ограниченным, голоморфным и фредгольмовым в области $\Lambda = \mathbb{C} \setminus \Lambda_0$.

Доказательство. В области Λ , как следует из леммы 3, оператор-функция $N(\gamma)$ ограничена и голоморфна. Поскольку соотношение (12) справедливо для любых $u \in H_0^1(\Omega)$, $v \in H_0^1(\Omega)$, введем следующие пробные функции u_f и v_f такие, что

$$u_f = \frac{\varepsilon_x}{\kappa^2} u, \quad v_f = \frac{1}{\kappa^2} v.$$

Очевидно, что так определенные функции u_f и v_f принадлежат тем же пространствам, что и исходные функции u и v .

Соотношение (12) примет вид

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \kappa^2 \left(\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x} \Pi \bar{u}_f + \Phi \bar{v}_f \right) dx - \int_{\Omega} (\nabla \Pi \nabla \bar{u}_f + \nabla \Phi \nabla \bar{v}_f) dx - \\ & - \int_{\Omega} \left(\bar{u}_f \nabla \Pi \nabla \frac{\kappa^2}{\varepsilon_x} + \bar{v}_f \nabla \Phi \nabla \kappa^2 \right) dx + \int_{\Omega} \frac{\gamma}{\kappa^2} \left(\bar{v}_f J(\varepsilon_x, \Pi) - \frac{\bar{u}_f}{\varepsilon_x} J(\varepsilon_x, \Phi) \right) dx = 0, \quad (19) \end{aligned}$$

$$\forall u_f \in H_0^1(\Omega), v_f \in H_0^1(\Omega).$$

Мы можем переписать оператор-функцию $N(\gamma)$ следующим образом:

$$N(\gamma) := K_f(\gamma) + I, \quad (20)$$

где операторы $K_f(\gamma)$ и I определяются следующими квадратичными формами:

$$k_f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} \kappa^2 \left(\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x} \Pi \bar{u}_f + \Phi \bar{v}_f \right) dx - \int_{\Omega} \left(\bar{u}_f \nabla \Pi \nabla \frac{\kappa^2}{\varepsilon_x} + \bar{v}_f \nabla \Phi \nabla \kappa^2 \right) dx +$$

$$+ \int_{\Omega} \frac{\gamma}{\kappa^2} \left(\bar{v}_f J(\varepsilon_x, \Pi) - \frac{\bar{u}_f}{\varepsilon_x} J(\varepsilon_x, \Phi) \right) dx = (K_f(\gamma) \mathbf{u}, \mathbf{v}), \forall \mathbf{v} \in H,$$

и

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} (\nabla \Pi \nabla \bar{u}_f + \nabla \Phi \nabla \bar{v}_f + \Pi \bar{u}_f + \Phi \bar{v}_f) dx = (\mathbf{I} \mathbf{u}, \mathbf{v}), \forall \mathbf{v} \in H.$$

Оператор-функция $N(\gamma)$ фредгольмова, как сумма I (обратимого) и компактного $K_f(\gamma)$ операторов. $\square$

Теорема 2. Спектр оператор-функции $N(\gamma): H \rightarrow H$ является дискретным в Λ .

Доказательство. Из теоремы 1 и теоремы о голоморфной оператор-функции [9] следует утверждение теоремы.

5. Теорема о полноте системы собственных и присоединенных векторов оператор-функции

Число γ_0 называется характеристическим числом оператор-функции $N(\gamma)$, если уравнение $N(\gamma_0)\varphi_0 = 0$ имеет нетривиальное решение $\varphi_0 \neq 0$. Вектора $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_k$ называются собственными векторами $N(\gamma)$ и образуют цепочку присоединенных векторов, если выполняются следующие соотношения:

$$N(\gamma_0)\varphi_p + \frac{1}{1!} \frac{\partial N(\gamma_0)}{\partial \gamma_0} \varphi_{p-1} + \dots + \frac{1}{p!} \frac{\partial^p N(\gamma_0)}{\partial \gamma_0^p} \varphi_0 = 0, p = \overline{1, k}. \quad (21)$$

Определение 2. Система собственных и присоединенных векторов оператор-функции $N(\gamma_0)$ называется n -кратно полной, если любой набор из n векторов $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}$ может быть представлен как предел по норме пространства линейных комбинаций

$$\xi_{v,M} = \sum_{k=1}^M \sum_p \alpha_{p,M}^{(k)} \varphi_p^{(k,v)}, \quad v = 0, 1, \dots, n-1, \quad (22)$$

с коэффициентами $\alpha_{p,M}^{(k)}$, не зависящими от v , где

$$\varphi_p^{(k,v)} = \frac{d^v}{dt^v} \Big|_{t=0} e^{\gamma_k t} \left(\varphi_p^{(k)} + \frac{t}{1!} \varphi_{p-1}^{(k)} + \dots + \frac{t^p}{p!} \varphi_0^{(k)} \right),$$

γ_k – характеристическое число оператор-функции $N(\gamma)$.

Рассмотрим оператор-функцию $N(\gamma)$ в области $\Lambda_\eta = \{\gamma: |\gamma| > \eta\}$, где η – произвольное положительное число такое, что $\eta > \max_{x \in \bar{\Omega}} \varepsilon_x$. При этом очевидно, что $\Lambda_\eta \subset \Lambda$.

Теорема 3. Система собственных и присоединенных векторов оператор-функции $N(\gamma)$, отвечающая характеристическому числу из множества Λ_η , двукратно полна с конечным дефектом в $H \times H$.

Доказательство. Оператор-функцию $N(\gamma)$ будем представлять как возмущение пучка Келдыша $N_1(\gamma) = \gamma^2 K - K_1 + A_1$ аналитической в Λ_η оператор-функцией $N_2(\gamma) = -A_2(\gamma) + K_2(\gamma) + B_2(\gamma)$ и $N_2(\infty) = 0$. В силу теоремы 1 [9] система собственных и присоединенных векторов оператор-функции $N(\gamma)$ двукратно полна с конечным дефектом в $H \times H$.

Библиографический список

1. **Смирнов, Ю. Г.** Применение методов операторных пучков в задаче о собственных волнах частично заполненного волновода / Ю. Г. Смирнов // Доклады Академии наук СССР. – 1990. – № 312 (3). – С. 597–599.
2. **Делицин, А. Л.** О постановке краевых задач для системы уравнений Максвелла в цилиндре и их разрешимости / А. Л. Делицин // Известия Российской академии наук. Серия математическая. – 2007. – № 71 (3). – С. 61–112.
3. **Смирнов, Ю. Г.** Математические методы исследования задач электродинамики : монография / Ю. Г. Смирнов. – Пенза : Инф.-изд. центр ПензГУ, 2009. – 268 с.
4. **Смирнов, Ю. Г.** О дискретности спектра в задаче о нормальных волнах открытого неоднородного волновода / Ю. Г. Смирнов, Е. Ю. Смолькин // Дифференциальные уравнения. – 2017. – Т. 53, № 10. – С. 1298–1309.
5. **Смирнов, Ю. Г.** Исследование спектра в задаче о нормальных волнах закрытого регулярного неоднородного диэлектрического волновода произвольного сечения / Ю. Г. Смирнов, Е. Ю. Смолькин // Доклады Академии наук. – 2018. – Т. 478, № 6. – С. 1–4.
6. **Вайнштейн, Л. А.** Электромагнитные волны / Л. А. Вайнштейн. – М. : Радио и связь, 1988. – 440 с.
7. **Costabel, M.** Boundary Integral Operators on Lipschitz Domains: Elementary Results / M. Costabel // SIAM J. Math. Anal. – 1988. – Vol. 19, № 3. – P. 613–626.
8. **Като, Т.** Теория возмущений линейных операторов / Т. Като. – М. : Мир, 1972. – 740 с.
9. **Гохберг, И. Ц.** Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве / И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн. – М. : Наука, 1965. – 448 с.

References

1. Smirnov Yu. G. *Doklady Akademii nauk SSSR* [Reports of the USSR Academy of Sciences]. 1990, no. 312 (3), pp. 597–599.
2. Delitsin A. L. *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Seriya matematicheskaya* [Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Series: mathematics]. 2007, no. 71 (3), pp. 61–112.
3. Smirnov Yu. G. *Matematicheskie metody issledovaniya zadach elektrodinamiki: monografiya* [Mathematical methods of studying electrodynamics problems]. Penza: Inf.-izd. tsentr PenzGU, 2009, 268 p.
4. Smirnov Yu. G., Smol'kin E. Yu. *Differentsial'nye uravneniya* [Differential equations]. 2017, vol. 53, no. 10, pp. 1298–1309.
5. Smirnov Yu. G., Smol'kin E. Yu. *Doklady Akademii nauk* [Reports of the Academy of Sciences]. 2018, vol. 478, no. 6, pp. 1–4.

6. Vaynshteyn L. A. *Elektromagnitnye volny* [electromagnetic waves]. Moscow: Radio i svyaz', 1988, 440 p.
7. Costabel M. *SIAM J. Math. Anal.* 1988, vol. 19, no. 3, pp. 613–626.
8. Kato T. *Teoriya vozmushcheniy lineynykh operatorov* [The theory of linear operator perturbances]. Moscow: Mir, 1972, 740 p.
9. Gokhberg I. Ts., Kreyn M. G. *Vvedenie v teoriyu lineynykh nesamosopryazhennykh operatorov v gil'bertovom prostranstve* [Introduction into the theory of linear nonself-adjoint operators in Hilbert space]. Moscow: Nauka, 1965, 448 p.

Смолькин Евгений Юрьевич

кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, научно-исследовательский центр «Суперкомпьютерное моделирование в электродинамике», Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: e.g.smolkin@hotmail.com

Smol'kin Evgeniy Yur'evich

Candidate of physical and mathematical sciences, research assistant, the research center of “Supercomputer modeling in electrodynamics”, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Снегур Максим Олегович

студент, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: snegur.max15@gmail.com

Snegur Maksim Olegovich

Student, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

УДК 517.927.2:621.372.8

Смолькин, Е. Ю.

Метод оператор-функций в задаче о нормальных волнах анизотропного экранированного волновода произвольного сечения / Е. Ю. Смолькин, М. О. Снегур // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2018. – № 3 (47). – С. 52–63. – DOI 10.21685/2072-3040-2018-3-5.